数理解析研究所講究録
第 1840 巻 2013 年 1-12

Kostant-Kumar の nil-Hecke 代数

池田 岳　岡山理科大学

1 Introduction

アフィン・グラスマン多様体のシューベルト・カルキュラスがとても豊富な内容を持っていることが Lam, Schilling, Shimozono, Morse, Lapointe, Zabrocki (最近 arXiv に出た本の原稿 [10] には網羅的な解説がある) らによる研究で最近わかってきている．実は，その話の下地はかなり昔の Bott と Quillen そして Mitchell の仕事にあって**アフィン・グラスマン多様体のホモロジー群とコホモロジー群が互いに双対なホップ代数になっている**という枠組みが重要である．Shimozono と Lam の仕事によって，アフィン・グラスマン多様体のシューベルト類を具体的な対称関数と結びつけて理解できるようになった．彼らの議論は Peterson が 1997 年に MIT で行った講義を拠り所にしている．表題の Kostant-Kumar による nil-Hecke 代数は，その Peterson の講義において基本的な道具として用いられた．幅広い分野の方々に，このような方向の研究に興味を持っていただければ幸いである．そのために私の理解していることと，理解したいけれども十分に理解できていないことも含めて書きたい．

1.1 基点付きループ群のホモロジー環

Bott はコンパクト Lie 群 K の基点付きループ空間 ΩK のトポロジーを詳しく調べた．ΩK が群構造を持つことから，ホモロジー群 $H_*(\Omega K)$ が積構造を持つ．ホモロジー群とコホモロジー群は互いに双対なホップ代数の構造を持つ．K がユニタリ群の場合にはホモロジー群のホップ代数構造は次のように記述される．まず環としては次のように表示できる：

$$H_*(\Omega SU(n)) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}].$$

ここに σ_i は $2i$ 次の元で，$\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}$ は代数的に独立である．余積の構造は

$$\triangle(\sigma_i)=\sum_{j+k=i}\sigma_j\otimes\sigma_k$$

により与えられる．アンチポードについては後述する．

Quillen は ΩK がアフィン・グラスマン多様体とホモトピー同値になることを示した．G を K に対応する単連結な線型代数群とするときアフィン・グラスマン多様体は

$$\mathrm{Gr}_G:=G(\mathbb{F})/G(\mathbb{O}),$$

と定義される．ここに $\mathbb{F}=\mathbb{C}((t))$, $\mathbb{O}=\mathbb{C}[[t]]$ とした．アフィン・グラスマン多様体は Kac-Moody 群の等質空間ともみなせるから，コホモロジー，ホモロジーにおいてシューベルト類を考えることができる．

1.2 Lam, Shimozono の結果

$K=SU(n)$, $G=SL_n(\mathbb{C})$ の場合，ホモロジー・シューベルト類が Lascoux, Lapointe, Morse [14] によって導入された k-Schur 関数と同一視されるだろうという Shimozono の予想が Lam [9] によって肯定的に解決された．予想を立てる際に nil-Hecke 代数の余積に関する構造定数を求めて k-Schur 関数の積構造定数と比較したとのことである．この話では $H_*(\Omega SU(n))=\mathbb{Z}[\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}]$ の生成元 σ_i は i 次の完全対称関数 h_i と同一視される．

T を K の極大トーラスとし，$\mathfrak{h}$ をその Lie 環の複素化，S を $\mathfrak{h}^*$ 上の対称代数とする．Peterson は 1997 年の講義において，Kostant-Kumar の nil-Hecke 代数を用いて S 上のホップ代数のペアリング

$$H_*^T(\mathrm{Gr}_G)\times H_T^*(\mathrm{Gr}_G)\to S=H_T^*(pt)$$

を理解する方法を与えた．特にホモロジー群 $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ を affine nil-Hecke 環 $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ の部分代数として実現したことが重要である（Peterson の j-写像）．Shimozono, Lam らは Peterson の結果をフル活用してアフィン・シューベルト・カルキュラスを展開している．特に，対称関数環との結びつきを確立して，シューベルト多項式を同定した．Peterson の理論，および Lam, Shimozono の結果を概観する．

2 Nil-Hecke 代数と旗多様体の T 同変コホモロジー

Kostant-Kumar の nil-Hecke 代数について基本的なことをまとめる．原論文 [7], [8] および Kumar の本 [3] の他 Peterson の講義 [15] や，それの解説が [12] などに書かれているので参照されたい．

2.1 Nil-Hecke 代数

Peterson [15] の流儀で nil-Hecke 代数の基本事項を説明する．

I を添字集合とし，$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を GCM (generalized Cartan matrix) とする．つまり $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ であり，$a_{ii} = 2$ であって，$a_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$ かつ $a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow a_{ji} = 0$ とする．P, P^* を自由アーベル群の組で完全なペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle : P^* \times P \to \mathbb{Z}$ が与えられているとする．1 次独立な集合 $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\} \subset P$ および $\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee \mid i \in I\} \subset P^*$ が与えられており $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{ij}$ が成り立つとする．このとき $(A, P, P^*, \Pi, \Pi^\vee)$ を **Kac-Moody ルート・データ**であるという．

GCM は対称化可能 (定義は略す) であることを仮定する．ワイル群 W は生成元 s_i $(i \in I)$ および関係式

$$s_i^2 = 1 \quad (i \in I), \quad (s_i s_j)^{m_{ij}} = 1 \quad i, j \in I,\ i \neq j.$$

により定義される．m_{ij} は以下のように定める：

$$m_{ij} = \begin{cases} 2 & (a_{ij}a_{ji} = 0) \\ 3 & (a_{ij}a_{ji} = 1) \\ 4 & (a_{ij}a_{ji} = 2) \\ 6 & (a_{ij}a_{ji} = 3) \\ \infty & (a_{ij}a_{ji} \geq 4) \end{cases}.$$

W は P に次のように作用する：

$$s_i \lambda = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i \quad (i \in I,\ \lambda \in P).$$

これにより W は自然に $S := \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(P)$ [*1]に代数の自己同型として作用する．

Nil-Hecke 代数 $\mathbb{A}$ は文字 A_i $(i \in I)$ および S により生成される結合代数であって，関係式

$$A_i^2 = 0 \quad (i \in I),$$

---

*1 前節では $S = \mathrm{Sym}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}^*)$ としたが，ここからはここで定めた “$\mathbb{Z}$-form” を表わすことにする．

$$A_i \cdot \lambda = (s_i\lambda) \cdot A_i + \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \cdot 1 \quad (i \in I,\ \lambda \in P),$$
$$A_iA_jA_i \cdots = A_jA_iA_i \cdots \quad (\text{両辺とも } m_{ij} \text{ 回}) \quad (i, j \in I,\ i \neq j)$$

により定義される.

$w \in W$ を $w = s_{i_1} \cdots s_{i_r}$ と簡約な積の形に書いて

$$A_w = A_{i_1} \cdots A_{i_r}$$

とおくと w のみにより決まり $\{A_w \mid w \in W\}$ は $\mathbb{A}$ の S 上の基底をなす. S は自然に $\mathbb{A}$ の部分環であるが, **一般に S の元は $\mathbb{A}$ の中心元であるわけではない**ことに注意する.

ワイル群の群環 $\mathbb{Z}[W]$ から $\mathbb{A}$ への単射環準同型が

$$s_i \mapsto 1 - \alpha_i A_i \quad (i \in I)$$

により定まる. これにより W の元をしばしば $\mathbb{A}$ の元とみなす. これに関して例えば

$$w \cdot s = w(s) \cdot w \quad (s \in S,\ w \in W)$$

が成り立つ. この関係式は Kostant-Kumar が S の商体 $Q := \mathrm{Frac}(S)$ 上の W の "ねじれ群環" の部分環として nil-Hecke 代数を導入していることと比較すればよい. さて $v \in W$ に対して, これを上記の準同型で $\mathbb{A}$ の元とみて

$$v = \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} \xi_v^w A_w \quad (\xi_v^w \in S)$$

と展開するとき, ここに係数として現れる $\xi_v^w \in S$ はシューベルト・カルキュラスにおいて非常に基本的な意味合いを持つ. このことは後で述べることにする.

命題 1. $s \in S$ として $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}(S)$ の元として s を掛ける作用素と「差分商作用素」を

$$\hat{s} \cdot f = sf, \quad \hat{A}_i \cdot f = \alpha_i^{-1}(f - s_i(f)) \quad (f \in S)$$

と定める. このとき $A_i \mapsto \hat{A}_i$, $s \mapsto \hat{s}$ により S は左 $\mathbb{A}$ 加群の構造を持つ.

(証明) この作用と $\lambda \in P$ を掛ける作用 $\hat{\lambda}$ との交換関係を計算してみると

$$(A_i\hat{\lambda})f = A_i(\lambda f) = \frac{1}{\alpha_i}(\lambda f - s_i(\lambda f)) = \frac{1}{\alpha_i}(\lambda f - s_i\lambda \cdot s_i f).$$

一方

$$\begin{aligned}((\widehat{s_i\lambda})A_i)f &= \frac{1}{\alpha_i}(s_i\lambda \cdot f - s_i\lambda \cdot s_i f) \\ &= \frac{1}{\alpha_i}((\lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i)f - s_i\lambda \cdot s_i f) \\ &= (A_i\hat{\lambda})f - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle f.\end{aligned}$$

$A_i f$ は s_i 不変なので $A_i^2 = 0$ がしたがう．また A_i $(i \in I)$ が braid 関係式を満たすことも示せる． $\square$

ここで $\mathbb{A}$ の **"余積"** について触れておく．M, N を左 $\mathbb{A}$ 加群とするとき

$$M \otimes_S N = M \otimes_{\mathbb{Z}} N / \langle sm \otimes n - m \otimes sn \mid m \in M,\ n \in N,\ s \in S \rangle$$

と定義する．このとき $M \otimes_S N$ の $\mathbb{A}$ 加群構造を

$$s \cdot (m \otimes n) = sm \otimes n = m \otimes sn,$$

$$A_i(m \otimes n) = A_i m \otimes n + s_i \cdot m \otimes A_i n = m \otimes A_i n + A_i m \otimes s_i \cdot n$$

により定める[*2]ことができる．

特に $\mathbb{A}$ を左 $\mathbb{A}$ 加群とみなすとき $\mathbb{A} \otimes_S \mathbb{A}$ は $\mathbb{A}$ 加群構造を持つ．左 $\mathbb{A}$ 加群の準同型 $\Delta : \mathbb{A} \to \mathbb{A} \otimes_S \mathbb{A}$ を

$$\Delta(a) = a \cdot (1 \otimes 1)$$

と定める．すると

$$\Delta(w) = w \otimes w \ (w \in W), \quad \Delta(s) = s \otimes 1 = 1 \otimes s,$$

$$\Delta(A_i) = A_i \otimes 1 + s_i \otimes A_i = 1 \otimes A_i + A_i \otimes s_i.$$

$\mathbb{A} \otimes_S \mathbb{A}$ を「成分ごとの積」で環とみなすことはできないことに注意しておく．実際に，もしもそうであれば $(A_i \otimes 1)(s \otimes 1) = (A_i \otimes 1)(1 \otimes s)$ $(s \in S)$ となるはずだが，するとこれは $A_i s \otimes 1 = A_i \otimes s = s(A_i \otimes 1) = sA_i \otimes 1$ を導く．これは例えば $s = \alpha_i$ とすれば正しくない．したがって Δ を余代数射とみなせるわけではない．Peterson の講義では $\mathbb{A}$ の Hopf algebroid としての構造についても議論しており，重要と思われるが，勉強不足のため表面的な紹介さえままならず残念である．

2.2 旗多様体の T 同変コホモロジー

G を有限型とする (念のため)．Flag variety G/B の T-同変 Schubert 類 σ^w $(w \in W)$ が定義され S 上の基底をなす：

$$H_T^*(G/B) = \bigoplus_{w \in W} S\sigma^w.$$

T-固定点の集合 $(G/B)^T$ は W と同一視できる．v の像を e_v で表す．

[*2] 最後の等号は $s_i = 1 - \alpha_i A_i$ と $\otimes_S$ の定義を使えばすぐに示せる．

定理 1 ([1],[7]). 埋め込み $\iota_v : e_v \to G/B$ による引き戻し $\iota_v^* : H_T^*(G/B) \to H_T^*(e_v) \cong S$ により

$$\iota_v^*(\sigma^w) = \xi^w(v)$$

が成立する.

W 上の S 値関数のなす環を $\mathrm{Map}(W, S)$ とするとき上記の引き戻し写像により単射 $H_T^*(G/B) \hookrightarrow H_T^*((G/B)^T) \cong \mathrm{Map}(W, S)$ が得られて，σ^w が ξ^w に対応しており，

$$\Xi = \bigoplus_{w \in W} S\xi^w \subset \mathrm{Map}(W, S)$$

とおくと，S 代数の同型 $H_T^*(G/B) \cong \Xi$ があるといえる.

これは非常に基本的な事実であるが，このとおり明確に書かれている文献は意外に少ない. Graham [2] にはいくつかの文献で使われている記号の比較も含めてはっきりと書いてある. もともと Kostant-Kumar の最初の論文では nil-Hecke 代数を導入する際に同変コホモロジーとの関連に全く触れていないので，この事実に気が付いていなかったのだと思われる. 一方 Arabia [1] が Kac-Moody の旗多様体の同変コホモロジーを研究していて，上の定理を述べて Kostant-Kumar の結果だとして独自の証明をしている.

G が有限型でなく一般の Kac-Moody の場合でも上記の定理は「正しい」. ただし G や旗多様体やシューベルト類をどのように定式化するかはいくつかの立場がある. Kumar の本，Arabia, Peterson の講義などを参照されたい. そのなかで特に，柏原による thick flag variety のシューベルト多様体は ξ 関数に対して最善の解釈を与えると思われる. 同変 K 理論については最近 Kumar による [4] が出て，このあたりのことが明確になってきた. 同変コホモロジーの場合にわかりやすい文献はまだ無いようである.

2.3 Nil-Hecke 代数とは何なのか

[15] の立場では nil-Hecke 代数 $\mathbb{A}$ は $H_T^*(G/B)$ の S 双対 $\mathrm{Hom}_S(H_T^*(G/B), S)$ と自然に同一視される. その意味で $\mathbb{A}$ は G/B の T 同変ホモロジー $H_*^T(G/B)$ なのだということになる. 旗多様体のホモロジーが環構造を持つのはどういうことなのか？柏原正樹氏による最近の集中講義（東工大）によると thin flag variety 上の同変 $\mathcal{O}$ 加群の Grothendieck 群には「convolution 積」が定義されて [8] に現れた K 理論版の nil-Hecke 代数と同型な環になる. この話の同変ホモロジー版として理解されるべきだろう. 前述の

Hopf algebroid 構造が K 理論にも拡張されるのかなど，nil-Hecke 代数[*3]に関して基本的なことで考えておくべきことがいろいろ残されていると思う．

3 Affine nil-Hecke 代数と Peterson の j-map

ここまでは Kac-Moody で成り立つ話で，ここから先はアフィン型特有のことなので，記号を一新して，改めて $(A, P, P^*, \Pi, \Pi^\vee)$ を**有限型**の既約なルート・データとする．これらに対応して $\mathfrak{g}$ を有限次元の複素単純 Lie 環，G を線型代数群とする．W を対応するワイル群，$Q^\vee$ を余ルート格子とする．アフィン・ワイル群 $W_{\mathrm{af}} = W \ltimes Q^\vee$ は s_i $(i \in I \cup \{0\})$ により生成される．ここに I は A の添字集合である．P 上には W の作用を拡張して W_{af} の（忠実でない）作用が定義できる．つまり

$$(wt_\lambda)\cdot\mu = w\mu \quad (\lambda \in Q^\vee,\ \mu \in P).$$

$t_\mu \in W_{\mathrm{af}}$ は μ に対応する translation element である．$S = \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(P)$ として W_{af} の作用を代数の自己同型として延長する．

Kac の本にほぼ沿って以下の記号を使う．

$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$：$\mathfrak{g}$ に付随する untwisted affine Lie algebra

$\delta = \sum_{i \in I \cup \{0\}} a_i \alpha_i$: $\mathfrak{g}$ の null root

$P_{\mathrm{af}} = \mathbb{Z}\delta \oplus \bigoplus_{i \in I \cup \{0\}} \mathbb{Z}\Lambda_i \subset \mathfrak{h}_{\mathrm{af}}^*$：$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ のウエイト格子．

$G_{\mathrm{af}} \supset P_I^- \supset B_{\mathrm{af}}^- \supset T_{\mathrm{af}}$ を以下のように定める．G_{af} を $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ に付随して [5] で定義された無限次元のスキーム，$X_{\mathrm{af}} = G_{\mathrm{af}}/B_{\mathrm{af}}^-$ を thick flag variety，$\mathrm{Gr}_G = G_{\mathrm{af}}/P_I^-$ を thick affine Grassmann 多様体とする．T_{af} を P_{af} を指標群に持つトーラスとする．また $T = T_{\mathrm{af}} \cap G$ とする．

Thick flag variety の T 同変コホモロジーについて基本的なことが書かれた文献がないが，K 理論については，[6] がある（論文の主題であるアフィンの話以外にも一般の Kac-Moody で成り立つ基本的な事項が議論されている）．ここでは nil-Hecke 代数を使って $H^*_{T_{\mathrm{af}}}(X_{\mathrm{af}})$，$H^*_T(X_{\mathrm{af}})$ および $H^*_T(\mathrm{Gr}_G)$ を nil-Hecke 代数の言葉で代数的に「定義」することにする．

射影 $P_{\mathrm{af}} \to P$ が $\mathbb{Z}\delta \oplus \mathbb{Z}\Lambda_0$ を核として自然に定まる．$S = \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(P)$，$S_{\mathrm{af}} = \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}(P_{\mathrm{af}})$ とするとき $\phi : S_{\mathrm{af}} \to S$ が誘導される．$\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ を S （S_{af} **ではなく！！**）と

[*3] 聞くところによると，自明な箙（！）に対する箙 Hecke 代数が A 型のアフィン nil-Hecke 代数と同型なのだとか．勉強不足で唖然とするばかりです．

W_{af} により (§2.1) と同様の関係式で定義される代数とする.

3.1 Affine flag variety の T 同変コホモロジーの記述

$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$（のルートデータ）に付随して §2.1 で定義した Ξ をここでは一旦 Ξ'_{af} と書く. $H^*_{T_{\mathrm{af}}}(X_{\mathrm{af}}) = \Xi'_{\mathrm{af}}$ と考えてよいはずである. ξ'^w をその ξ 関数とすると $\Xi'_{\mathrm{af}} = \prod_{w \in W_{\mathrm{af}}} S_{\mathrm{af}} \xi'^w$ が成り立つ. T_{af} 同変から T 同変へ忘却写像 $H^*_{T_{\mathrm{af}}}(X_{\mathrm{af}}) \to H^*_T(X_{\mathrm{af}})$ が定まるはずだが, それは

$$\xi^w : W_{\mathrm{af}} \xrightarrow{\xi'^w} S_{\mathrm{af}} \xrightarrow{\phi} S$$

により与えられていて,

$$H^*_T(X_{\mathrm{af}}) = \prod_{w \in W_{\mathrm{af}}} S\xi^w =: \Xi_{\mathrm{af}}$$

だと考えればよい（[11] や [13] を参照).

ここで Ξ_{af} を $\mathrm{Map}(W_{\mathrm{af}}, S)$ の中で特徴づけることに触れておく. いわゆる GKM 条件 (Goresky-Kottwitz-MacPherson) によって Ξ'_{af} を $\mathrm{Map}(W_{\mathrm{af}}, S_{\mathrm{af}})$ の中で決めることができる（コホモロジーの係数は $\mathbb{Q}$ にしないといけないが). S_{af} から S に落とすことで, null root 方向がつぶれるので, アフィンの意味で異なるルートがひとつの有限のルートになることが起きる. そのため, T に関する同変理論では, GKM 条件だけでは足りず,「小さいトーラスの GKM 条件」が考えられている. 技術的だが大切である. 詳しくは [11] や [13] を参照されたい.

3.2 Affine Grassmannian の Schubert 類

Affine flag variety $X_{\mathrm{af}} = G_{\mathrm{af}}/B^-_{\mathrm{af}}$ から affine Grassmannian $\mathrm{Gr}_G = G_{\mathrm{af}}/P^-_I$ への射影がある. Affine Grassmannian の Schubert 類を理解する際に重要なのは W の剰余類に対する最短代表系である：

$$W^I_{\mathrm{af}} = \{w \in W_{\mathrm{af}} \mid \ell(wv) > \ell(w)\ (v \in W)\}.$$

$(\mathrm{Gr}_G)^T \cong W^I_{\mathrm{af}} \cong W_{\mathrm{af}}/W$ が成り立つことに注意しておく.

$\Xi_{\mathrm{Gr}} \subset \Xi_{\mathrm{af}}$ を W に関する左剰余類において一定値をとる関数のなす部分環とする. このとき, $H^*_T(\mathrm{Gr}_G) = \Xi_{\mathrm{Gr}}$ とみてよい.

3.3 T 同変ホモロジーの記述

$H_T^*(\mathrm{Gr}_G)=\Xi_{\mathrm{Gr}}$ と考えているので $H_*^T(\mathrm{Gr}_G):=\mathrm{Hom}_S(\Xi_{\mathrm{Gr}},S)$ と定義するのはこの際自然だと思う．$\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ と Ξ_{af} には自然なペアリングがあることに注意しておく．

ホモロジー群の同変シューベルト基底 $\{\sigma_w \mid w\in W_{\mathrm{af}}^I\}$ はコホモロジーのシューベルト類 $\{\sigma^w \mid w\in W_{\mathrm{af}}^I\}$ の双対である．

3.4 "向きを間違えた" 写像

自然な射影 $X_{\mathrm{af}}=G_{\mathrm{af}}/B_{\mathrm{af}}^-\to \mathrm{Gr}_G=G_{\mathrm{af}}/P_I^-$ が誘導するコホモロジーの写像とは逆向きの写像（S 加群の準同型）

$$\varpi: H_T^*(X_{\mathrm{af}})\longrightarrow H_T^*(\mathrm{Gr}_G)$$

をここでは局所化の見方で定義する．$\xi\in H_T^*(X_{\mathrm{af}})$ に対して $\varpi(\xi)\in\mathrm{Map}(W_{\mathrm{af}},S)$ を

$$\varpi(\xi)(w)=\xi(t_\mu)$$

と定める．ただし，ここで $wW=t_\mu W$ をみたす $\mu\in Q^\vee$（一意的）をとった．$\varpi(\xi)$ が $H_T^*(\mathrm{Gr}_G)$ に属すことは確かめなければならない．さらに ϖ の双対写像として

$$j: H_*^T(\mathrm{Gr}_G)\longrightarrow H_*^T(X_{\mathrm{af}})=\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$$

を定義しよう．つまり

$$\langle j(\sigma),\xi\rangle=\langle\sigma,\varpi(\xi)\rangle\quad(\sigma\in H_*^T(\mathrm{Gr}_G),\quad \xi\in H_T^*(X_{\mathrm{af}})).$$

補題 1 (Peterson). j の像は $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ における S の中心化環 $Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S)$ と一致する．

S ではなくて S_{af} にしてしまうと中心化環は小さくなり過ぎて興味が薄い．

$Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S)$ は $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ の "余積" を受け継いで余積を持つ．$t_\mu\mapsto t_{-\mu}$ ($\mu\in Q^\vee$) により antipode が定義できて S 上のホップ代数の構造を持つ．一方 $\mathrm{Gr}_G\cong\Omega K$ の見方から $H_*^T(\mathrm{Gr}_G)$ には S 上のホップ代数の構造がある．

定理 2 (Peterson, cf. Lam [9]). 写像 $j: H_*^T(\mathrm{Gr}_G)\to Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S)$ は S 上の Hopf 代数の同型である．

定理 3 (Peterson, cf. Lam [9]). $w \in W_{\mathrm{af}}^I$ とする．このとき

$$j(\sigma_w) = A_w + \sum_{v \in W_{\mathrm{af}} \setminus W_{\mathrm{af}}^I} j_w^v A_v \quad (j_w^v \in S).$$

写像 j はこの性質をみたすものとして一意的に定まる．

Lam の証明は Peterson の証明を再定式化したものである．この結果の K 理論版も [11] で得られていて，証明は更に整理されている．

3.5 ここまでのまとめ

アフィン・グラスマン多様体 Gr_G の T 同変コホモロジーおよびホモロジーは互いに双対な $S = H_T^*(pt)$ 上のホップ代数であって，どちらも nil-Hecke 代数 $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ を用いて代数的に定められる S 上のホップ代数のペア

$$\Xi_{\mathrm{Gr}} \times Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S) \to S$$

と同一視できる；$H_T^*(\mathrm{Gr}_G) \cong \Xi_{\mathrm{Gr}}$，$H_*^T(\mathrm{Gr}_G) \cong Z_{\mathbb{A}_{\mathrm{af}}}(S)$. さらに，コホモロジーのシューベルト類は ξ 関数により，ホモロジーのシューベルト類は j-map により代数的に記述できる．Lam, Shimozono は，以上の枠組みを用いて，シューベルト類を詳細に計算できることを示した．

3.6 対称関数環との関係

完全対称関数 $h_k(x)$ を次で定義する：

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) t^k = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - t x_i)^{-1}.$$

$\Lambda := \mathbb{Z}[h_1(x), h_2(x), \ldots]$ を対称関数環と呼ぶ．余積構造を

$$\triangle(h_i(x)) = \sum_{j+k=i} h_j(x) \otimes h_k(x)$$

と定める．アンチポードは $S(h_i(x)) = (-1)^i e_i(x)$ によって定める．$e_i \in \Lambda$ は i 次の基本対称関数である．

ペアリング $\Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ を

$$\langle h_\lambda(x), m_\mu(x) \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

により定める（Hall の内積）．$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ は非負整数の非増加列で $h_\lambda(x) = h_{\lambda_1}(x)h_{\lambda_2}(x)\cdots$ であり，$m_\lambda(x)$ は x^λ のすべての置換の和として定義される (x^λ の係数は 1)．これにより Λ は自己双対なホップ代数である．

$\Lambda_{(n)} := \mathbb{Z}[h_1(x), \ldots, h_{n-1}(x)]$ とする．Bott の定理より

$$\Lambda_{(n)} \cong H_*(\mathrm{Gr}_{SL_n})$$

が知られている．Lam は $\mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ の中に $\Lambda_{(n)}$ と同型なホップ代数を構成した．$1 \le k \le n-1$ とし J を k 個の元からなる $I = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ ($A_{n-1}^{(n)}$ の Dynkin 図形とみる) の部分集合とする．J を連結成分に分け，各連結成分ごとに A_{i+1} が A_i ($\mathbb{Z}/z\mathbb{Z}$ で考えていることに注意）よりも左にあるように並べて，全体の積を作ったものを A_J とする（連結成分が異なれば生成元は可換であることに注意)．サイズが k の J をすべて考えて A_J たちの和を $\hat{h}_k$ とする．例えば $n = 4$, $k = 2$ ならば

$$\hat{h}_2 = A_3A_2 + A_3A_1 + A_0A_3 + A_2A_1 + A_2A_0 + A_1A_0.$$

定理 4 (Lam [9])．$\mathbb{Z}[\hat{h}_1, \ldots, \hat{h}_{n-1}] \subset \mathbb{A}_{\mathrm{af}}$ は $H_*(\mathrm{Gr}_{SL_n})$ と同型なホップ代数であって，シューベルト類はこの対応で k-Schur 関数と呼ばれる対称関数と同一視できる．

k-Schur 関数に関しては，いまや大量に文献がある．[10] を手がかりに，興味のある問題を見つけていただければと思う．

3.7 最後に

非同変のホモロジーと同型な環を nil-Hecke 代数の中に作るという手法（affine Fomin-Stanley subalgebras と呼んでいる）が Lam によって開発されて以来，彼のグループの研究はその方法に基づいている．私は T 同変のままで議論して，最後の最後に非同変にするほうが自然だと考えている．同変の場合は，多項式がパラメータを含んで複雑になる一方で，同変独特の「局所化」の手法が使えるからである．実際に具体的な多項式と比較するためには非同変に早くもってゆきたいということはあるだろうが，Lam, Shimozono の両氏には，会うたびに，同変のままで議論する方がうまくいくんじゃないかと言い続けてきた．最近 [13] が出たので，彼らもそういう発想に近づいてきたものと思える．計算に慣れるのに時間がかかって，自分ではなかなか実行できなかったのだが，Symplectic 群の場合に「最後まで同変」の方針で現在計算中（岡山大学の成瀬弘さんとの共同研究）で，東工大の内藤聡さんが代表された RIMS 研究集会の講究録にはその詳細を書きたいと思う．無理矢理に非同変にする必要なんかないということを示したい．

参考文献

[1] A. Arabia, Cohomologie T-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody, Bull. Soc. Math. France 117 (1989), 129-165.

[2] W. Graham, Positivity in equivariant Schubert calculus, Duke Math. J. vol. 109, No.3 (2001) 599-614.

[3] S. Kumar, Kac-Moody groups, their flag varieties and representation theory, Prog. Math. 204, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. xvi+606 pp.

[4] S. Kumar, Positivity in T-equivariant K-theory of flag varieties associated to Kac-Moody groups, arXiv:1209.6422.

[5] M. Kashiwara, The flag manifold of Kac-Moody Lie algebra, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 161-190, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989.

[6] M. Kashiwara, M. Shimozono, Equivariant K-theory of affine flag manifolds and affine Grothendieck polynomials, Duke Math. J. 148 (2009), no.3, 501-538.

[7] B. Kostant, S. Kumar, The nil-Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G, Adv. Math. 62 (1986), no.3, 187-237.

[8] B. Kostant, S. Kumar, T-equivariant K-theory of generalized flag varieties, J. Diff. Geom. 32 (1990), no. 2, 549-603.

[9] T. Lam, Schubert polynomials for the affine Grassmannian, J. Amer. Math. Soc. 21 (2008), no. 1, 259-281.

[10] T. Lam, L. Lapointe, J. Morse, A Schilling, M. Shimozono, M. Zabrocki, k-Schur functions and affie Schubert calculus, arXiv:1301.3569.

[11] T. Lam, A. Schilling, M. Shimozono, K-theoretic Schubert calculus of the affine Grassmannian, Compos. Math. 146 Issue 4 (2010) 811-852.

[12] T. Lam, M. Shimozono, Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian, Act. Math. 204 (2010), 49-90.

[13] T. Lam, M. Shimozono, k-Double Schur functions and equivariant (co)homology of the affine Grassmannian, to appear in Math. Ann.

[14] L. Lapointe, A. Lascoux, J. Morse, Tableau atoms and a new Macdonald positivity conjecture, Duke Math. J. 116 (2003), no. 1, 103-146.

[15] D. Peterson, Lecture Notes at MIT, 1997.